10 класс

Первый день

10.1. В Национальной Баскетбольной Ассоциации 30 команд, каждая из которых проводит за год 82 матча с другими командами в регулярном чемпионате. Сможет ли руководство Ассоциации разделить команды (не обязательно поровну) на Восточную и Западную конференции и составить расписание игр так, чтобы матчи между командами из разных конференций составляли ровно половину от общего числа матчей?

10.2. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q выбрана на отрезке BC так, что $PQ \perp AC$. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников APD и BQD, параллельна прямой AD.

10.3. Дан кубический многочлен $f(x)$. Назовём *циклом* тройку различных чисел (a, b, c) таких, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Известно, что нашлись восемь циклов (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, \ldots, 8$, в которых участвуют 24 различных числа. Докажите, что среди восьми чисел вида $a_i + b_i + c_i$ есть хотя бы три различных.

10.4. Внутри выпуклого 100-угольника выбрана точка X, не лежащая ни на одной его стороне или диагонали. Исходно вершины многоугольника не отмечены. Петя и Вася по очереди отмечают ещё не отмеченные вершины 100-угольника, причём Петя начинает и первым ходом отмечает сразу две вершины, а далее каждый своим очередным ходом отмечает по одной вершине. Проигрывает тот, после чьего хода точка X будет лежать внутри многоугольника с отмеченными вершинами. Докажите, что Петя может выиграть, как бы ни ходил Вася.

XLII Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Первый день

10.1. В Национальной Баскетбольной Ассоциации 30 команд, каждая из которых проводит за год 82 матча с другими командами в регулярном чемпионате. Сможет ли руководство Ассоциации разделить команды (не обязательно поровну) на Восточную и Западную конференции и составить расписание игр так, чтобы матчи между командами из разных конференций составляли ровно половину от общего числа матчей?

10.2. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q выбрана на отрезке BC так, что $PQ \perp AC$. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников APD и BQD, параллельна прямой AD.

10.3. Дан кубический многочлен $f(x)$. Назовём *циклом* тройку различных чисел (a, b, c) таких, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Известно, что нашлись восемь циклов (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, \ldots, 8$, в которых участвуют 24 различных числа. Докажите, что среди восьми чисел вида $a_i + b_i + c_i$ есть хотя бы три различных.

10.4. Внутри выпуклого 100-угольника выбрана точка X, не лежащая ни на одной его стороне или диагонали. Исходно вершины многоугольника не отмечены. Петя и Вася по очереди отмечают ещё не отмеченные вершины 100-угольника, причём Петя начинает и первым ходом отмечает сразу две вершины, а далее каждый своим очередным ходом отмечает по одной вершине. Проигрывает тот, после чьего хода точка X будет лежать внутри многоугольника с отмеченными вершинами. Докажите, что Петя может выиграть, как бы ни ходил Вася.